Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

8 класс

1. Садовник хочет посадить шесть кустов крыжовника, чтобы на расстоянии 2м от каждого из них росло ровно три куста крыжовника. Сможет ли он это сделать?

***Ответ***: Да. Например, если на двух сторонах квадрата ABCD построить правильные треугольники AEB и DCF, то для каждой точки условия будут выполняться, так как DE=EC<DC, AF=FB>AB и AD=EF(стороны параллелограмма).

***Критерии***:

Есть верный пример без обоснования равенства/неравенства сторон – 4 балла;

Есть верный пример с полным обоснованием – 7 баллов;

Только ответ – 0 баллов

1. В выражении замените каждую из букв на какую-то из цифр от 1 до 9 (одинаковые буквы – на одинаковые цифры, разные буквы – на разные цифры) так, чтобы значение выражения получилось наибольшим. *Покажите, как нужно расставить цифры, вычислите значение вашего выражения и объясните, почему оно наибольшее.*

***Решение***:Сократим множители Т,М,А. Тогда выражение примет вид . Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем знаменателе и наибольшем числителе. Следовательно Е=1, а числа И,К,А равны цифрам 9,8,7. Числа М,А,Т могут быть произвольными.

***Ответ***: 505

***Критерии***:

Есть только пример с верным ответом – 7 баллов.

Есть только пример – 4 балла.

1. В волшебном королевстве обитают лисицы с семью и девятью хвостами. Те, у кого 7 хвостов, всегда врут, а те, у кого 9 хвостов, всегда говорят правду. Однажды три лисицы завели между собой разговор.

Рыжая лиса: «у нас вместе 27 хвостов».

Серая лиса: «это действительно так!»

Белая лиса: «глупости, Рыжая говорит чепуху!»

Сколько хвостов было у каждой лисицы? (Ответ обоснуйте.)

***Решение***: Если бы Рыжая говорила правду, то у всех трёх было бы по 9 хвостов. Но тогда и Белая говорила бы правду, а это неверно. Тогда Рыжая лжет, и Серая соответственно тоже. Тогда Белая говорит правду.

***Ответ***: У Рыжей было 7 хвостов, у Серой – 7, у Белой – 9.

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. Мальчик Марат может за минуту подняться с первого этажа на пятый этаж, а девочка Даша за то же время успевает добежать только до четвертого. Даша спускается вдвое быстрее, чем поднимается, а Марат спускается с той же скоростью, что и Даша. Дети решили посоревноваться и добежать с первого этажа до 25, стартуя одновременно. Марат, достигнув 25 этажа, начал спускаться, чтобы встретить проигравшую Дашу. Сколько пройдёт времени от начала соревнования до момента встречи?

***Решение***: За минуту Марат поднимается на 4 этажа вверх, а Даша – на 3 этажа вверх. За ту же минуту оба могут спуститься на 6 этажей вниз. Для того чтобы победить Марату нужно преодолеть 24 этажа. Через 6 минут Марат достигает финиша, а Даша поднимается только на 18 этажей (до 19). Теперь расстояние между ними 6 этажей, а скорость сближения 3+6=9 этажей в минуту. Чтобы встретиться им понадобится 40 секунд.

***Ответ***: 6 минут и 40 секунд

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. В треугольнике АВС все стороны равны 2017 см. Точки M, N, P, K расположены так, как показано на рисунке. Известно, что CK + PC = MA + AN = 2017 см. Найдите величину угла KON.

***Решение***: Заметим, что CK + PC = AP + PC и MA+AN = MA+MC. Тогда CK=AP и AN=MC. Следовательно, треугольники APN и MKC равны. ∠ANP=∠CMK и ∠APN+∠ANP=120о. Тогда ∠MPO+∠PMO =120о. ∠KON=∠POM =60о.

Ответ: ∠KON =60о

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 0 баллов;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

1. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 – палиндром, а 2017 – нет). Представьте число 2017 в виде суммы двух палиндромов.

***Решение***: например, 1331+686=2017.

***Критерии***:

Наличие любого верного примера – 7 баллов.

1. Айрат и Дина вместе весят 84 кг, Дина и Таня – 76 кг, Таня и Саша – 77 кг, Саша и Маша – 67 кг, Маша и Айрат – 64 кг. Кто тяжелее всех и сколько он весит?

***Решение***: А+Д=84, Д+Т=76, Т+С=77, С+М=67, М+А=64. Сложим все уравнения и получим 2(А+Д+Т+С+М)=368. Тогда А+Д+Т+С+М= 184. Используя второе и четвертое равенство из условия получим А+76+67=184. Следовательно А=41, Д=43, Т=33, С=44, М=23.

***Ответ***: Самый тяжелый – Саша. Саша весит 44 кг.

***Критерии:***

Только ответ, без объяснений, без указания веса – 0 баллов;

Только ответ, без объяснений, с указанием веса – 3 балла;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. Дамир нарисовал на тетрадном листе квадрат 5 × 5 и каждую минуту закрашивает по одной клетке. Лёша считает количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток и записывает это число на доске. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел на доске будет равна 40.Доказательство: Заметим, что Леша считает количество границ данной клетки, для которых обе соседние клетки закрашены. Выполняя свои операции, Леша каждую границу считает один и только один раз. Тогда, сумма всех чисел равна количеству граничных отрезков, а именно 2\*4\*5=40.
2. Найдите площадь закрашенной части параллелограмма, если площадь большого параллелограмма равна 40 (вершины всех параллелограммов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?

***Решение***: В параллелограмме ABCD проведем отрезки EG и FH. Они параллельны боковым сторонам. Тогда образуются 4 меньших параллелограмма. В каждом из них диагональ делит параллелограмм на две равные части. Следовательно, суммарная площадь «угловых» треугольников AEH, EBF, FCG, GDH равна площади параллелограмма EFGH.

 В задаче дано, что все четырехугольники – параллелограммы. *Это доказывать не обязательно!* Тогда площадь «угловых» треугольников самого большого параллелограмма равна 20. У второго – 10, у третьего – 5. Вычтем из площади всего параллелограмма площади «угловых» треугольников первого и третьего параллелограммов. 40-20-5=25.

***Ответ***: 25.

***Критерии:***

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. Вместо пропусков вставьте такие числа, чтобы выражение

стало тождеством.

***Решение***: Пусть пропущены числа

. Подставим в уравнение. Получим , . Подставим Получим

. Тогда . Подставим Получим Тогда .

***Ответ***: .

***Критерии:***

Только ответ, без объяснений – 4 балла;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

1. Делится ли 72017 + 72018 + 72019 на 19?

***Решение***: .

***Ответ***: Да.

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 0 баллов;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. В прямоугольнике ABCD на стороне CD отметили середину M, и на стороне AD – середину N. Отрезки CN и AM пересекаются в точке K. Во сколько раз площадь четырехугольника AKCB больше площади четырехугольника MDNK?

***Решение***: ED – медиана треугольника ACD. Известно, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих. Тогда площади треугольников AEK, CEK, CMK, DMK, DKN, ANK равны. А площадь треугольника ACD равна площади ABC. Тогда отношение .

***Ответ***: в 4 раза.

***Критерии***:

Только ответ, без объяснений – 1 балл;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. Постройте график функции .

***Решение***: Приведем к виду . Преобразуем

. Тогда график примет вид



***Критерии:***

Только верный график, без объяснений – 4 балла;

Решение с полным обоснованием – 7 баллов.

1. В деревне хоббитов каждый либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Волшебник пригласил к себе нескольких хоббитов и спросил каждого из них про каждого из остальных, «правдолюб» тот или «лжец». Всего было получено 54 ответа «правдолюб» и 56 ответов «лжец». Сколько раз волшебник мог услышать правду?

***Решение***: Если приглашено n хоббитов, то дано n(n – 1) = 54 + 56 = 110 ответов, откуда n = 11. Пусть из этих 11 хоббитов t правдолюбов и (11 – t) лжецов.

Ответ «лжец» может дать только лжец про правдолюба и правдолюб про лжеца, таких фраз было 2t(11 – t) = 56, откуда t = 4 или t = 7. Если правдолюбов четверо, то они дали 4 ⋅ 10 = 40 правдивых ответов. Если правдолюбов семеро, то они дали 7 ⋅ 10= 70 правдивых ответов.

Комментарий. Обратите внимание на то, что из условия следует, что правдивыми являются половина из ответов «лжец». Но сразу не ясно, какова доля правдивых ответов «правдолюб».

***Критерии***:

• Полное решение — 7 баллов.

• Правильно найдены оба случая (сколько правдивцев и лжецов), но

неверно подсчитано число правдивых ответов — 4 балла.

• Возможны 2 ситуации, описанные в задаче. Если верно разобрана только

одна, то ставить 3 балла.

• Приведены оба ответа без объяснения — 1 балл.

• Приведён только один из ответов — 0 баллов.***Ответ***: 40 или 70

1. У торговца драгоценностями есть 61 гиря весом 1г, 2г, … , 61г. Он выставил их в ряд так, чтобы вес каждой, начиная со второй, является делителем суммы весов всех предшествующих гирь. Первая гиря весит 61г, вторая – 1г. Найдите вес третьей гири.

***Ответ***. 2.

***Решение***. Сумма всех чисел, кроме последнего, делится на последнее число,

значит, сумма всех чисел также делится на последнее число. Сумма всех чисел

от 1 до 61 равна 31 ⋅ 61. Значит, последнее число равно 1, 31 или 61. Так как 1 и

61 стоят на первом и втором местах, последнее число — 31. Третье число —

делитель числа 61 + 1 = 62, то есть оно равно 1, 2 или 31. Мы знаем, что числа 1

и 31 расположены не на третьем месте, поэтому на третьем месте стоит число 2.

Замечание. Приводить пример, как расположены числа на остальных карточках

(или доказывать его существование), не требуется.

***Критерии:***

• Полное верное решение — 7 баллов.

• Утверждается, что на третьей карточке — число 2 или число 19, но

других продвижений нет — 1 балл.

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

1. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел a и b, бóльших 1, удовлетворяющих уравнению a13 · b31 = 62017.

***Решение***. Достаточно привести один пример.

Так как , подходят a = .

***Комментарий***: возможно множество различных ответов со всевозможными комбинациями степеней двоек и троек.

***Критерии***:

• Приведена хотя бы одна пара значений a, b и показано, что она удовлетворяет данному условию — 7 баллов.

• Приведена пара чисел, более ничего не обосновано (а жюри умеет показывать, что пара подходит) — 5 баллов.

• Основная идея решения верна, но допущена арифметическая ошибка

(например, написано, что ) — 2 балла.

1. Имеет ли уравнение хотя бы один корень? Ответ обоснуйте.

***Ответ***: Например, .

***Решение***:

***Критерии***:

• Приведён верный ответ, и показано, что при этом значении х равенство

верно, — 7 баллов.

• Приведён только верный ответ — 3 балла.

1. Дан куб. A, B и C – середины его рёбер (см. рисунок). Чему равен косинус угла ABC ? 

***Решение***: Не умаляя общности примем сторону куба за 2. Тогда , . Вычислим по трем сторонам косинус угла ABC. .

***Критерии***:

• Получен верный ответ со всеми обоснованиями – 7 баллов.

• Ход решения правильный, но ответ неверен из-за арифметической ошибки – 5 баллов.

• Получен ответ – 4 балла.

• Только ответ (в том числе – верный) – 0 баллов.

***Ответ:***

1. На координатной плоскости (x, y) изобразите множество всех точек, для которых y2 + y = x2 + x.

***Ответ***: 

***Решение***: . Тогда .

***Критерии***:

Построен верный график со всеми обоснованиями – 7 баллов.

Построен верный график без обоснований – 3 балла.

1. В пенале у Равиля 9 карандашей. Он заметил, что среди любых четырёх карандашей хотя бы два одного цвета. А среди любых пяти карандашей не больше трёх имеют один цвет. Карандаши скольких различных цветов есть у Равиля, и сколько карандашей каждого цвета?

***Ответ***. Три цвета по три карандаша.

***Решение***. Ни одного цвета не более трех, так как в противном случае условие «среди любых пяти карандашей не больше трёх имеют один цвет» было бы не выполнено. Всего карандашей 9, поэтому цветов не менее трех. С другой стороны среди любых четырёх карандашей хотя бы два одного цвета, поэтому цветов меньше четырех. Таким образом, цветов карандашей три, причем каждого не более трех штук, а всего карандашей 9. Значит,

каждого цвета по 3.

***Критерии*:**

• Полный ответ с верным объяснением – 7 баллов.

• Обосновано, что детей трое – 5 баллов.

• Верные соображения, но решение не доведено до конца – 1-2 балла.

• Ответ без обоснования – 0 баллов.